# 三角関数のヘルパー $tan\frac{\theta}{2}$

三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ は，本質的な関係式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ のほかに，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ が重要ですが，すべてと関係を持つ $\tan\dfrac{\theta}{2}$ の役割を紹介しておきましょう。

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおいたとき，次の等式が成り立つ。ただし，$\theta\fallingdotseq(2n-1)\pi$，$n$ は整数。

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}\quad\left(\theta\fallingdotseq\frac{2n-1}{2}\pi\right)\quad\cdots(*)$$

証明

$$\cos\theta=\frac{\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta=\frac{\sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{1}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

いずれも2倍角公式を利用しており，途中で分母･分子を $\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ で割っている。

$\tan\theta$ については $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ としてもよいし，2倍角公式からすぐに導かれる。

終

コメント１ この関係については「山脇の超数学講座 No.9～ピタゴラス数へのこだわり～」でも登場しています。

# 山脇の超数学講座 No. 46

## ヘルパー $tan\frac{\theta}{2}$ が活躍するとき

**問題 1**　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおき，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{5\sin x+3}$ を求めよ。

解答　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

また，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1+t^2}{2}$ から $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

ゆえに

$$\int\frac{dx}{5\sin x+3}=\int\frac{1}{5\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{3t^2+10t+3}dt$$

$$=2\int\frac{1}{(t+3)(3t+1)}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{3t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{4}(\log|3t+1|-\log|t+3|)+C$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{3t+1}{t+3}\right|+C=\frac{1}{4}\log\left|\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|+C$$

（$C$ は積分定数）となる。

解説　$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ ならば，次のようにして求める。

解答　$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$ であるから

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=-\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}(\log|t-1|-\log|t+1|)+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$$

しかし，上記の問題1のような不定積分では，$\cos x=t$ と置き換えてもうまくいかない。

そこで，ヘルパー $\tan\dfrac{\theta}{2}$ の登場となるのである。すべての三角関数を表すことができる $\tan\dfrac{\theta}{2}$ の存在によって，積分の可能性が拡げられる。以下のような問題にも利用できる。

**問題 2**　$7\sin x+6\cos x=2$ のとき，$\tan x$ の値を求めよ。

解答　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，(*) より，$\dfrac{14t}{1+t^2}+\dfrac{6(1-t^2)}{1+t^2}=2 \iff 4t^2-7t-2=0$

$\iff (4t+1)(t-2)=0 \iff t=-\dfrac{1}{4},\ 2 \iff \tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}=-\dfrac{8}{15},\ -\dfrac{4}{3}$

と求められる。もちろん，$t$ の値によって (*) より，$\cos x$，$\sin x$ の値も直ちに求められる。

コメント２　細胞の中で免疫反応をすすめるように指令を出す「**ヘルパーT 細胞**」に倣（なら）いました。